2019年下半年教师资格证初级中学数学真题

（时间 120 分钟　满分 150 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1.在利用导数定义证明的过程中用到的极限是（）

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ C. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$ D. $\lim\limits_{x\to\infty}q^{x}=0,0<q<1$

2.设 M，X，Y 为 n 阶方阵，则下列命题一定正确的是（）

A.XY=YX B.M(X+Y)=MX+MY

C.若 XY=O 且 X≠O，则 Y=OD.若 MX=MY 且 M≠O，则 X=Y

3.下列定积分计算结果正确的是（）

A. $\int_{-1}^{1}\left(x^2+x^3\right)\mathrm{d}x=0$ B. $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$ C. $\int_{-1}^{1}\ln\left(x+2\right)\mathrm{d}x=0$ D. $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x=0$

4.将椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,a>b>0,\\ z=0\end{cases}$ 绕长轴旋转一周，所得旋转曲面的方程为（）

A. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ B. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{a^2}=1$ C. $x^2+y^2+z^2=a^2$ D. $x^2+y^2+z^2=b^2$

5.设向量组α_1，α_2和β_1，β_2是方程组 AX=O 的两个不同的基础解系，则下列结论正确的是（）

A.向量组α_1，α_2，β_1的秩小于向量组β_1，β_2的秩

B.向量组α_1，α_2，β_1的秩大于向量组β_1，β_2的秩

C.向量组α_1，α_2，β_1的秩等于向量组β_1，β_2的秩

D.向量组α_1，α_2，β_1的秩与向量组β_1，β_2的秩无关

6.若三个非零向量共面，则下列结论不一定成立的是（）

A.$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$B.$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$C.$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 线性相关 D.$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0$

7.在平面直角坐标系中，将一个多边形依次沿两个坐标轴方向分别平移 2 个单位和 3 个单位后，得到的图形与原来的图形的关系不一定正确的是（）

A.全等 B.平移 C.相似 D.对称

8.学生是数学学习的主体，“以人为本”是数学教学的重要理念，下列关于教师角色的概述不正确的是（）

A.组织者 B.引导者 C.合作者 D.指挥者

二、简答题（本大题共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分）

9.设 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 变换 Y=AX+B，其中变换矩阵 A=$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$，

（1）写出椭圆 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{9}=1$ 在该变换下 $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 满足的曲线方程；

（2）举例说明在该变换下什么性质保持不变，什么性质发生变化（例如距离、斜率等）。

10.利用一元函数积分计算下列问题：

（1）求曲线 y=sinx 与 y=x^2-πx 所围成平面图形的面积；

（2）求曲线 y=sinx，x∈[0，π]绕 x 轴旋转一周所围成的几何体体积。

11.一个袋子里有 8 个黑球，8 个白球，随机不放回地连续取球 5 次。每次取出 1 个球，求最多取到 3 个白球的概率。

12.简述研究中学几何问题的三种主要方法。

13.简述数学教学活动中调动学生学习积极性的原则。

三、解答题（本大题共 10 分）

14.对于问题：“已知函数 f(x)在[0，1]上可导，且 f(0)=0，对于任何 x∈[0,1]，有 $\left|f'(x)\right|\le\left|f(x)\right|$，求证：f(x)=0，x∈[0,1]。”有人是这样做的：

$\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f'(\xi)\right|(x-0)(0<\xi<x)$①，

$\left|f'(\xi_1)\right|x\le f(\xi_1)x$②，

$\left|f(\xi_1)-f(0)\right|x\le\left|f'(\xi_2)\right|\xi_1 x\le\left|f(\xi_2)\right|x^2(0<\xi_2<\xi_1<x)$③，

$\left|f(\xi_2)-f(0)\right|x^2\le\left|f'(\xi_3)\right|\xi_2 x^2\le\left|f(\xi_3)\right|\xi_2 x^2\le\left|f(\xi_3)\right|x^3(0<\xi_3<\xi_2<\xi_1<x)$④。

请解答下列问题：

（1）写出步骤①的证明依据；

（2）写出步骤②的证明依据；

（3）指出步骤③和步骤①的关系；

（4）完成步骤④以后的证明。

四、论述题（本大题共 15 分）

15.学生的数学学习应当是一个生动活泼，积极主动和富有个性的过程，认真听讲，积极思考，动手实践，自主探索，合作交流等都是学习数学的主要方式。请谈谈教师如何在教学中帮助学生养成良好的数学学习习惯。

五、案例分析题（本大题共 20 分）

16.案例：下面是某个学生的作业：

解方程：$\dfrac{1-x}{x-2}=\dfrac{1}{2-x}+3$

①移项得：$\dfrac{1-x}{x-2}-\dfrac{1}{2-x}=3$，②通分得：$\dfrac{1-x+1}{x-2}=3$；③化简得：-1=3；④矛盾，原方程是不是无解。

问题：（1）指出该学生解此方程时出现的错误，并分析其原因；

（2）给出上述方程的一般解法，帮助学生解除疑惑；

（3）简述中学阶段解方程常用的数学思想方法。

六、教学设计题（本大题共 30 分）

17.针对“角平分线的性质定理”的内容，请你完成下列任务：

（1）叙述角平分线的性质定理；

（2）设计“角平分线的性质定理”的教学过程，并说明设计意图。（只要求写出新课导入、定理形成与证明过程）

（3）借助“角平分线的性质定理”，简述如何帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验。

2019年下半年教师资格证初级中学数学真题解析

一、单项选择题

1.B

2.B【解析】选项 A，若 XY=E 时，满足交换律 XY=YX，故 A 错误；选项 C，若 XY=O，且 X≠O，则 Y 不一定是零矩阵，如 X=$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，Y=$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，满足 XY=O，且 X≠O，则 Y≠O，故 C 错误；选项 D，若 M 是可逆矩阵时，MX=MY 的两边同时左乘 M^{-1} 可得，X=Y，故 D 错误。

3.D【解析】由于被积函数$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$是奇函数，奇函数在区间[-1,1]上的定积分为 0，故选 D。

4.A【解析】因为旋转轴是 x 轴，所以在方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$中，保留坐标 x 不变，用$\pm\sqrt{y^2+z^2}$代替 y，可得椭圆绕其长轴旋转的曲面方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$。

5.C【解析】因为向量组α_1，α_2和β_1，β_2是方程组 AX=O 的两个不同的基础解系，所以α_1，α_2是线性无关的，β_1，β_2也线性无关，则该线性方程组的解β_1可由基础解系α_1，α_2线性表出，则α_1，α_2，β_1是线性相关的，且 $r(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)= r(\alpha_1, \alpha_2)=r(\beta_1, \beta_2)$，故选 C。

6.B【解析】三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是（$\boldsymbol{abc}$）$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=0$，或者 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 线性相关，故 A，C，D 都正确。

7.D【解析】根据图形平移的性质可知，平移后的图形一定与原图形全等，相似，但不一定是对称的，故选 D。

8.D【解析】《义务教育课程标准》（2011 年版）指出，有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

二、简答题

9.【解析】（1）由 Y=AX+B，得 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，则有 $\begin{cases}y_1=\frac{1}{2}x_1+3,\\ y_2=\frac{1}{3}x_2+5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=2y_1-6,\\ x_2=3y_2-15,\end{cases}$ 将其代入椭圆方程得，满足此变换下的曲线方程为 $(y_1-3)^2+(y_2-5)^2=1$。

（2）以（1）中的椭圆方程为例，在该变换下得到新的方程是以（3,5）为圆心，半径为 1 的圆，其中图形的大小、形状、几何中心的位置都发生了变化。

10.【解析】（1）将两曲线方程联立得 $\begin{cases}y=\sin x,\\ y=x^2-\pi x,\end{cases}$ 解得两曲线的交点为（0,0），（π，0），则两曲线围成的平面图形的面积为 $\int_0^{\pi}\left[\sin x-\left(x^2-\pi x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\left(x^2-\pi x\right)\mathrm{d}x=-\cos x|_0^{\pi}-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\pi x^2\right)\Big|_0^{\pi}=2+\frac{\pi^3}{6}$。

（2）旋转体的体积为 $\int_0^{\pi}\pi\sin^2 x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi^2}{2}$。

11.【解析】根据题意得，不放回抽样时，设取到白球的个数为 X=0，1，2，3，则有 P(X=0)= $\frac{C_8^5}{C_{16}^5}=\frac{1}{78}$，P(X=1)= $\frac{C_5^1C_8^4C_8^1}{C_{16}^5}=\frac{5}{39}$，P(X=2)= $\frac{C_5^2C_8^2C_8^3}{C_{16}^5}=\frac{14}{39}$，P(X=3)= $\frac{C_5^3C_8^2C_8^3}{C_{16}^5}=\frac{14}{39}$，故最多取到 3 个白球的概率为 $P=\frac{1}{78}+\frac{5}{39}+\frac{14}{39}+\frac{14}{39}=\frac{67}{78}$。

12.【参考答案】研究中学几何问题的方法有数形结合、化归思想、变换思想。

（1）中学几何数学是比较抽象的，包括空间和数量关系，数形结合能够帮助学生将两者进行相互转化，使抽象的知识更易于理解学习。在几何学习中，数形结合思想具有重要的作用，教师在教学中运用数形结合思想，能够将几何图形用代数的形式进行表示，并利用代数的方式解决几何问题。例如，根据几何性质，建立只限于平面的代数方程，或是根据代数方程确定点、线、面三者之间的关系。

数形结合将几何图形与代数公式紧密地结合在一起，利用代数语言将几何问题简化，使学生更容易解决问题，是几何教学的核心思想方法。

（2）化归思想是数学中普遍运用的一种思想，在几何教学中，教师常运用这一思想，基本的运用方法就是将几何问题转化为代数问题，利用代数知识将问题解决后，在返回到几何中。或是在对空间曲线进行研究时，将复杂的空间几何图形转化为学生熟悉的平面曲线，便于学生理解和解决。例如，在解决圆柱问题时，可以通过其对应的轴截面进行解决；在解决正棱锥问题时，可以利用化归思想将这一问题转化为对应特征三角形和特征梯形的问题进行解决。

（3）变换思想是能够将复杂问题简单化的一种思想方法，变换思想在运用时，一般仅改变数量关系形式和相关元素位置，问题的结构和性质没有变化。在几何教学中，教师利用变换思想进行变换，实现二次曲线方程的化简，能够通过方程运算准确的将方程所表示的图形展现出来，在降低学生学习难度的同时，也为研究几何图形性质等提供了依据。

13.【参考答案】数学教学活动，特别是课堂教学应激发学生兴趣，调动学生的积极性，引发学生的数学思考，鼓励学生的创造性思维；要注重培养学生良好的数学学习习惯，使学生掌握恰当的数学学习方法。

教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能，体会和运用数学思想与方法，获得基本的数学活动经验。

三、解答题

14.【参考答案】（1）拉格朗日中值定理。

（2）根据已知条件对于任何 x∈[0,1]，有$\left|f'(x)\right|\le\left|f(x)\right|$。

（3）$\because \left|f(\xi_1)-f(0)\right|x=\left|f'(\xi_2)\right|(\xi_1-0)\cdot x,\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，

$\therefore \left|f(\xi_1)-f(0)\right|\cdot x\le\left|f(\xi_2)\right|\xi_1\cdot x$, $\therefore \left|f(\xi_1)-f(0)\right|\cdot x\le\left|f(\xi_2)\right|x^2$, 由①知，在（0，x）上利用拉格朗日中值定理，在（0，ξ₁）上，继续使用拉格朗日中值定理可得③。

（4）$\because \left|f(x)-f(0)\right|=\left|f'(\xi_1)\right|(x-0)(0<\xi_1<x)$①，

由②得$\left|f(\xi_1)-f(0)\right|x\le\left|f(\xi_2)\right|x^2,(0<\xi_2<\xi_1<x)$③，

$\left|f(\xi_2)-f(0)\right|x^2 \le \left|f(\xi_3)\right|x^3,(0<\xi_3<\xi_2<\xi_1<x)$④，……，

$\left|f(x)-f(0)\right| \le \left|f(\xi_1)\right|x \le \left|f(\xi_2)\right|x^2 \le \cdots \le \left|f(\xi_n)\right|x^n$

$(0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_1<x)$，当$n\to\infty,\xi_n\to 0$时，则有

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|f(x)-f(0)\right| \le \lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)x^n=0$，则$\left|f(x)-f(0)\right|=0$，

$\therefore \left|f(x)\right|=0$,即 f(x)=0。

四、论述题

15.【参考答案】学生的数学学习应当是一个生动活泼的、主动的富有个性的过程。认真听讲、积极思考、动手实践、自主探索、合作交流等，都是学生学习数学的重要方式。

学生的数学学习应当有足够的时间和空间经历观察、实验、猜测、计算、推理、验证等活动过程在数学教学中，必须通过学生主动的活动包括观察、描述、画图、操作、猜想、实验、收集整理数据、思考、推理、交流和应用等等，让学生亲身体验如何做数学，实现数学的“再创造”，并从中感受到数学的力量，教师在学生进行数学学习的过程中应当给他们留有充分的思维空间，使学生能够真正的从事数学思维活动。培养学生的数学学习习惯应该从以下几方面入手：

1.使学生认识学习的重要性；

2.培养学生认真听课的习惯：首先要提前预习，明确听课的目的；其次在课堂教学中提高学生的学习兴趣；最后在教学过程中及时对学生的表现进行评价，有助于学生认真听课习惯的养成；

3.培养学生认真思考的习惯；

4.培养学生想象的习惯；

5.培养学生认真复习的习惯；

6.培养学生认真完成作业的习惯。

五、案例分析题

16.【参考答案】（1）学生解方程时并没有按照分式方程的标准解法，而是直接移项再去化简分式的分子和分母；解分式方程是中学数学学习的一个重点内容，也是一个难点，学生出现这种问题可能在于运算基础不够扎实，想要直接约去分式的分子与分母，一定要保证约去的式子不能为 0。

（2）原式的两边乘以 x-2，化简得-4x=-8，解得 x=2，最后将代入原方程检验 x=2 是增根，所以该方程无解。

（3）在中学阶段常用的解方程的数学思想方法有很多，常用的有整体的思想，比如换元法，换元法是在解方程中常用的一种方法，即对结构较复杂的方程或方程组，若把其中的某些部分看成一个整体，用新的字母代替，从而得到新的方程的解题方法，换元法能使复杂的问题简单化；其次还有方程思想，在解决某些问题时，从题目中的已知量和未知量之间的数量关系入手，找出相等关系，运用数学语言将相等关系转化成新的方程或方程组，在通过解新的方程或方程组使问题得到解决。对于解方程还常常使用到化归的思想，化归思想是把所有要解决的问题转化为另一个较容易解决的问题或已经解决的问题，即化难为易，化繁为简，化未知为已知。

六、教案设计题

17.【参考答案】（1）角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等。

（2）教学过程：

一、复习引入

问题 1：角平分线的定义。

问题 2：点到直线的距离。

学生思考，回答问题。

【设计意图】复习已学过的知识，为下面的研究创造条件。

二、新课讲授

1.感悟实践经验，用尺规作角的平分线

问题 3：在练习本上画一个角，怎样得到这个角的平分线？

师生活动：学生可能用量角器，也可能用折纸的方法动手操作，然后回答问题。

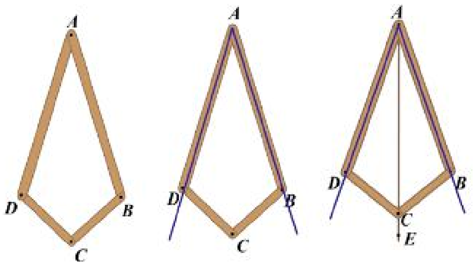
追问 1：你能评价这些方法吗？在生产生活中，这些方法是否可行呢？

师生活动：学生分析并回答，利用量角器比较方便，但是有误差；利用折叠的方法比较简捷，但是只限于可以折叠的材质，若在木板、钢板等材料上操作，此方法就不可行了。

追问 2：用平分角的仪器可以平分一个角（多媒体展示内容），你能说明它的道

理吗？

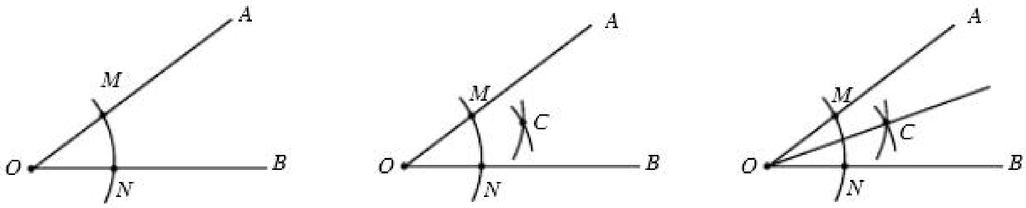
下图是一个平分角的仪器，其中 AB=AD，BC=DC，将点 A 放在角的顶点，AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE，AE 就是∠DAB 的平分线，你能说明它的道理吗？



师生活动：教师启发学生将实际问题抽象为数学模型，并运用全等三角形的知识解释平分角的仪器的工作原理。

追问 3：从利用平分角的仪器画角的平分线中，你受到哪些启发？如何利用直尺和圆规作一个角的平分线？

师生活动：师生分别在黑板和练习本上画出∠AOB，学生尝试利用直尺和圆规作∠AOB 的平分线，教师与学生共同归纳，得出利用尺规作角的平分线的具体方法。



如果学生没有思路，教师可作如下提示：

（1）在用平分角的仪器画角的平分线时，把仪器放在角的两边，仪器的顶点与角的顶点重合，且仪器的两边相等（AB=AD），怎样在作图中体现这个过程呢？

（2）在用平分角的仪器中，BC=DC，怎样在作图中体现这个过程呢？

追问 4：你能说明为什么射线 OC 是∠AOB 的平分线吗？

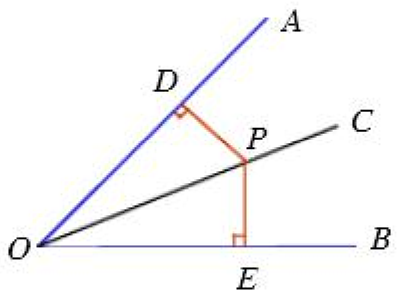
师生活动：学生用三角形全等进行证明，明确作图的理论依据。

【设计意图】让学生运用全等三角形的知识解释平分角的仪器的工作原理，体会数学的应用价值，同时从中获得启发，用尺规作角的平分线，增强作图技能，最后让学生在简单推理的过程中，体会作法的合理性。

2.经历实验过程，发现并证明角的平分线的性质

问题 4：利用尺规可以作一个角的平分线，那么角的平分线有什么性质呢？首先思考下面的问题：

如图，任意一个∠AOB，作出∠AOB 的平分线 OC，在 OC 上任取一点 P，过点 P 画出 OA，OB 的垂线，分别记垂足为 D，E，测量 PD，PE 并作比较，你得到什么结论？在 OC 上再取几个点试一试，通过以上测量，你发现了角平分线的什么性质？



师生活动：学生动手操作，独立思考，然后汇报自己的发现，学生互相补充，教师指导，一起概括出角的平分线的性质。

追问 5：通过动手实验、观察比较，我们发现“角平分线上的点到角两边的距离相等”，你能通过严格的逻辑推理证明这个结论吗？

师生活动：教师首先引导学生分析命题的条件和结论，如果学生感到困难，可以让学生将命题改为“如果……那么……”的形式，然后引导学生逐字分析结论，进而发现并找出结论中的隐含条件（垂直）。最后让学生画出图形，用符号语言写出已知和求证，并独立完成证明。

追问 6：由角平分线的性质的证明过程，你能概括出证明几何命题的一般步骤吗？

师生活动：师生共同概括证明几何命题的一般步骤：

（1）明确命题中的已知求证；

（2）根据题意，画出图形，并用数学符号语言写出；

（3）经过分析，找出由已知推出求证的途径，写出证明过程。

追问 7：角平分线的性质的作用是什么？

师生活动：学生回答，角平分线的性质作用主要是用于判断和证明两条线段相等。

【设计意图】让学生通过实验发现、分析概括、推理验证角的平分线的性质，体

会研究几何问题的基本思路。以角的平分线的性质的证明为例，让学生概括证明几何命题的一般步骤，发展他们的归纳概括能力，而反思性质，让学生进一步理解角的平分线的性质是证明两条线段相等的更简捷的方法。

（3）数学活动经验是一种属于学生自己的“主观性认识”，对于几何图形的数学活动经验，是学生经过数学学习后对整个数学活动过程产生的认识。如何帮助学生积累认识几何图形的数学活动经验，首先要联系直观图形，把生活经验转化为基本数学活动经验。学生在生活中已经积累的一些关于数学的原始、初步的经验，因此要善于捕捉生活中的数学现象，挖掘数学知识的生活内涵，让学生亲身经历将生活经验转化为数学活动经验的过程，例如在本节课中，可以先让学生画一个角，然后探究角平分线的作法，利用模型教具说明平分角的仪器的工作原理，从中受到启发，利用尺规做角的平分线，进一步思考角平分线上的点的特征。

其次要引导观察、思考推理，丰富学生思维的经验。积累活动经验总得依赖一些活动，但是所谓的活动并不一定是指直观的操作活动，行为操作的经验是基本活动经验，抽象的思考、探究的经验也是基本活动经验的重要组成部分。例如在本节课中，教师在抛出“PD 和 PE 有什么关系？”之后，教师先引导学生进行猜想，再带领学生进行自主探究去证明，对于不同的学生想出的证明方法可能都不一样，所以教师可以组织学生进行汇报交流，最后师生共同总结得到证明方法，最终得到角平分线定理的性质。