

2019 年上半年中小学教师资格考试真题试卷

数学学科知识与教学能力（初级中学）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. 下列选项中，运算结果一定是无理数的是（ ）

A. 有理数与无理数的和 B. 有理数与有理数的差

C. 无理数与无理数的和 D. 无理数与无理数的差

2. 在空间直角坐标系中，由参数方程
$$\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = a \sin^2 t, (0 \leq t \leq 2\pi) \\ z = a \sin 2t \end{cases}$$
 所确定的曲线的一般方程是（ ）

般方程是（ ）

A. $\begin{cases} x + y = a, \\ z^2 = 2xy \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y = a, \\ z^2 = 4xy \end{cases}$

C. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z^2 = 2xy \end{cases}$ D. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z^2 = 4xy \end{cases}$

3. 已知空间直角坐标与球坐标的变换公式为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta \end{cases} \left(\rho \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$
，则在球坐标系中， $\theta = \frac{\pi}{3}$ 表

示的图形是（ ）

A. 柱面 B. 圆面

C. 半平面 D. 半锥面

4. 设 A 为 n 阶方阵，B 是 A 经过若干次初等行变换得到的矩阵，则下列结论正确的是（ ）

A. $|A| = |B|$ B. $|A| \neq |B|$

C. 若 $|A| = 0$ ，则一定有 $|B| = 0$ D. 若 $|A| > 0$ ，则一定有 $|B| > 0$

5. 已知 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} (\pi x)^{2n-1}$ ，则 $f(1) =$ （ ）

A. -1 B. 0 C. 1 D. π

6.若矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征

根, 则 ()

A. $x=-2, y=2$ B. $x=1, y=-1$

C. $x=2, y=-2$ D. $x=-1, y=1$

7.下列描述为演绎推理的是 ()

A.从一般到特殊的推理

B.从特殊到一般的推理

C.通过实验验证结论的推理

D.通过观察猜想得到结论的推理

8.《义务教育数学课程标准》(2011年版)从四个方面阐述了课程目标, 这四个目标是 ()

A.知识技能、数学思考、问题解决、情感态度

B.基础知识、基本技能、问题解决、情感态度

C.基础知识、基本技能、数学思考、情感态度

D.知识技能、问题解决、数学创新、情感态度

二、简答题(本大题共5小题, 每小题7分, 共35分)

9.一次实践活动中, 某班甲、乙两个小组各20名同学在综合实践基地脱玉米粒, 一天内每人完成脱粒数量(千克)的数据如下:

甲组: 57, 59, 63, 63, 64, 71, 71, 71, 72, 75

75, 78, 79, 82, 83, 83, 85, 86, 86, 89

乙组: 50, 53, 57, 62, 62, 63, 65, 65, 67, 68

69, 73, 76, 77, 78, 85, 85, 88, 94, 96

问题: (1) 分别计算甲、乙两组同学脱粒数量(千克)的中位数; (2分)

(2) 比照甲、乙两组数据, 请你给出2种信息, 并说明实际意义。(5分)

10.试判断过点 $P_1(2, 0, 1), P_2(4, 3, 2), P_3(-2, 1, 1)$ 的平面 π 与平面

$\frac{1}{2}x + 2y - 7z + 3 = 0$ 的位置关系, 并写出一个与平面 π 垂直的方程。

11.已知方程 $x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 6x = 0$ 的两个实数解为1与-2, 试求该方程的全部实数解。

12.用统计方法解决实际问题的过程主要包括哪些步骤?

13.评价学生的数学学习应采用多样化的方式,请列举四种不同类型的评价方式。

三、解答题(本大题1小题,10分)

14.设 \mathbb{R}^2 为二维欧氏平面, F 是 \mathbb{R}^2 到 \mathbb{R}^2 的映射,如果存在一个实数 $\rho, 0 < \rho < 1$,使得对于任意的 $P, Q \in \mathbb{R}^2$,有 $d(F(P), F(Q)) \leq \rho d(P, Q)$ (其中 $d(P, Q)$ 表示 P, Q 两点间的距离),则称 F 是压缩映射。

设映射 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T((x, y)) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{3}y \right), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(1)证明:映射 T 是压缩映射;(4分)

(2)设 $P_0 = P_0(x_0, y_0)$ 为 \mathbb{R}^2 中任意一点,令 $P_n = T(P_{n-1}), n=1, 2, 3, \dots$,求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 。

(6分)

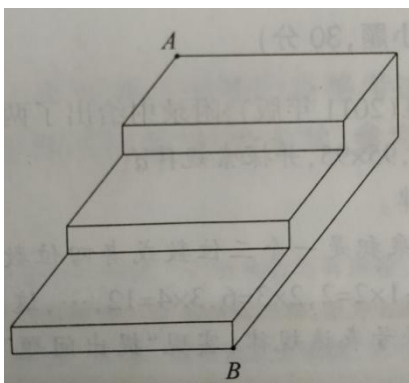
四、论述题(本大题1小题,15分)

15.函数是中学数学课程的主线,请结合实例谈谈如何用函数的观点来认识中学数学课程中的方程、不等式、数列等内容。

五、案例分析题(本大题1小题,20分)

16.案例:

甲、乙两位数学教师均选用如下素材组织了探究活动,如图1所示,这是一个三级台阶,它的每一级的长、宽、高分别为50cm、25cm和15cm。 A 和 B 是这个台阶的两个相对端点, B 点上有一只蚂蚁,想到 A 点去吃食物。请你想一想,这只蚂蚁从 B 点出发,沿着台阶面爬到 A 点,最短路线是什么?



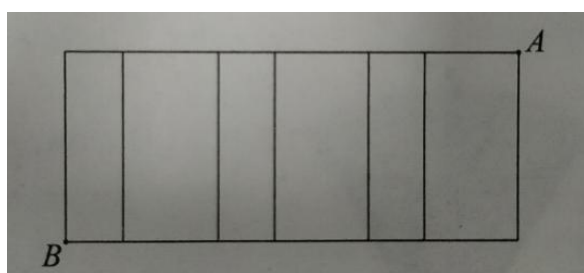
(图1)

两位教师的教学过程如下:

甲教师：用大屏幕展示问题情境，组织小组讨论，学生开始读题，教师巡视过程中看到有的同学把台阶画出来，与教学预设不符，立即中止了大家的讨论，指着题目说：“同学们请注意读题，是‘沿着台阶面’，你们把这张图画出来有什么用？”

在接下来的讨论中，教师又遇到新情况，有的学生画展开图，却把尺寸弄错了，于是教师终止思考。

乙教师：展示情境，将问题进行分析，出示了一张台阶模样的纸片，边说边将纸片拉直，如图 2 所示，然后让大家研究。很快，有同学说出答案，教师解释了下，同学们都明白了。



(图 2)

甲、乙教师课后交流：两个教师在教学中均有探究。

问题：

(1) 《义务教育数学课程标准》(2011 年版)指出，“有效的数学活动是教师教与学生学的统一”，教师应成为学生学习活动的组织者、引导者、合作者。

请说明两位教师的教学是否符合要求。(6 分)

(2) 两位教师组织的探究活动各自存在什么问题？请简要说明并简述理由。

(6 分)

(3) 组织数学探究活动需要注意哪些事项？请说明。(8 分)

六、教学设计题(本大题 1 小题，30 分)

17. 《义务教育数学课程标准》(2011 年版)附录中给出了两个例子：

例 1：计算 15×15 ， 25×25 ， \dots ， 95×95 ，并探索规律。

例 2：证明例 1 所发现的规律。

很明显例 1 计算所得到的乘积是一个三位数或者四位数，其中后两位数为 25，而百位和千位上的数字存在这样的规律： $1 \times 2 = 2$ ， $2 \times 3 = 6$ ， $3 \times 4 = 12$ ， \dots ，这

是“发现问题”的过程，在发现问题的基础上，需要尝试用语言符号表达规律，实现“提出问题”，进一步实现“分析问题”和“解决问题”。

请根据上述内容，完成下列任务：

- (1) 分别设计例 1、例 2 的教学目标；（8 分）
- (2) 设计“提出问题”的主要教学过程；（8 分）
- (3) 设计“分析问题”和“解决问题”的主要教学过程；（7 分）
- (4) 设计推广例 1 所探究的规律的的主要教学过程。（7 分）

2019 年上半年中小学教师资格考试

数学学科知识写教学能力试题(初级中学)参考答案及解析

一、单项选择题

- 1.A 【解析】①有理数与有理数的和、差、积、商（除数不为 0）均为有理数。
②一个有理数和一个无理数的和、差均为无理数；一个非零有理数与一个无理数的积、商（除数不为 0）为无理数。③无理数与无理数的和、差、积、商可能是有理数，也可能是无理数。故选 A。

2.B 【解析】由
$$\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = a \sin^2 t, \\ z = a \sin 2t \end{cases}$$
 可得 $x+y=a\cos^2t+a\sin^2t=a$,

$z^2 = a^2 (2 \sin t \cos t)^2 = 4a \sin^2 t \cdot a \cos^2 t = 4xy$ ，所以将参数方程化为一般方程为

$$\begin{cases} x + y = a, \\ z^2 = 4xy. \end{cases}$$

3.D 【解析】将 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 代入到
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta, \end{cases}$$
 得到
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \rho \cos \varphi, \text{①} \\ y = \frac{1}{2} \rho \sin \varphi, \text{②} \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho, \text{③} \end{cases}$$
 联立①②消

去 φ 得 $\rho^2 = 4(x^2 + y^2)$ ，由于 $\rho \geq 0$ ，所以 $\rho = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ，将其代入③中得

$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ ，而 $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ 是由 yOz 平面上的射线 $z = \sqrt{3}y (z > 0)$ 绕 z 轴旋转得到的，它表示以原点为顶点，以射线 $z = \sqrt{3}y (z > 0)$ 为母线，以 z 轴为中心轴的半锥面。故选 D。

4.C 【解析】初等变换不改变矩阵的秩，故若 $|\mathbf{A}|=0$ ，则一定有 $|\mathbf{B}|=0$ ，C 正确。矩阵的初等变换包括以下三种：①互换两行（列）；②以数乘某一行（列）；③用一个数乘某一行（列），加到另一行（列）上。若方阵 A 经过初等变换化为方阵 B，则经过变换①， $|\mathbf{A}|=-|\mathbf{B}|$ ；经过变换②， $|\mathbf{A}|=k|\mathbf{B}|$ ；经过变换③， $|\mathbf{A}|=|\mathbf{B}|$ 。故 A、B、D 均不一定成立。故选 C。

5.B 【解析】根据 $\sin x$ 的泰勒展开式，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

所以 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} (\pi x)^{2n-1} = \sin \pi x, \therefore f(1) = \sin \pi = 0$ 。故选 B。

6.C 【解析】A 有 3 个线性无关的特征向量，且 $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征根，所以属于 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量有 2 个，即方程组 $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有两个线性无关的解，则有 $3 - r(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 2, r(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 1$ 。

$$2\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{要使 } r(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 1, \text{ 则 } \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{y}, \text{ 解}$$

得 $x=2, y=-2$ 。故选 C。

7.A 【解析】演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到新结论的推理，是由一般到特殊的推理。故选 A。

8.A 【解析】《义务教育数学课程标准》（2011 年版）指出，义务教育阶段数学课程目标分为总目标和学段目标，从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度四个方面加以阐述。

二、简答题

9. 【解析】（1）根据中位数的定义可知，甲组同学脱粒数量（千克）的中位数是 $\frac{75+75}{2} = 75$ ，乙组同学脱粒数量（千克）的中位数是 $\frac{68+69}{2} = 68.5$ 。

（2）甲组同学脱粒数量（千克）的平均数 $\bar{x}_{\text{甲}} = 74.6$ ，极差为 $89-57=32$ ，

乙组同学脱粒数量（千克）的平均数 $\bar{x}_{\text{乙}} = 71.65$ ，极差为 $96-50=46$ 。

根据分析可知：①甲组同学脱粒数量的平均数大于乙组，故甲组同学脱粒速度更快；②根据两组数据的情况与极差可以发现甲组数据更稳定，而乙组数据波动大，从而可知，甲组同学的脱玉米能力差不多，而乙组同学的脱玉米能力存在很大的个体差异性，可以理解为，甲组同学在实际活动中的参与性和积极性要高于乙组。

10. 【解析】由题意知， $\overline{P_1P_2} = (2, 3, 1), \overline{P_1P_3} = (-4, 1, 0)$ ，则平面 π 的法向量

$$n = \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -4, 14)。平面 \frac{1}{2}x + 2y - 7z + 3 = 0 的法向量$$

$$m = \left(\frac{1}{2}, 2, -7\right) = -2n, \text{ 故 } n // m。又点 P_1(2, 0, 1) \text{ 不在平面 } \frac{1}{2}x + 2y - 7z + 3 = 0$$

上，故平面 π 与平面 $\frac{1}{2}x + 2y - 7z + 3 = 0$ 平行。

设与平面 π 垂直的平面为 π_1 ，其法向量为 n_1 。

由向量积的定义可知， $\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}$ 均与 $n = \overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}$ 垂直，则 $n_1 = \overline{P_1P_2}$ 为平面 π_1 的一个法向量，故可设 π_1 的方程为 $2x + 3y + z + d = 0$ ，将点 $P_1(2, 0, 1)$ 代入可得 $d = -5$ ，所以平面 π_1 的方程为 $2x + 3y + z - 5 = 0$ 。

11. 【解析】由原方程易知 $x=0$ 也是其解，则方程 $x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 6x = 0$ 存在实数解 $0, 1$ 与 -2 ，故多项式 $x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 6x$ 能被 $x(x-1)(x+2)$ 整除，作除法运算可得原方程等价于 $x(x-1)(x+2)(x^2 + 4x + 3) = x(x-1)(x+1)(x+2)(x+3) = 0$ ，故可得原方程的全部实数解为 $-3, -2, -1, 0, 1$ 。

12. 【参考答案】统计是一个包括数据的收集、整理、描述、分析和推断的完整过程，在统计活动中，学生要经历收集、整理、描述和数据分析这些活动，这些活动不仅能帮助学生了解数据处理的过程，而且能让学生学会制作扇形统计图、画频数直方图；不仅能让学生体会抽样的方法和必要性、掌握用扇形统计图直观、有效地描述数据，用频数直方图解释数据中蕴含的信息，而且能让学生掌握抽样与数据分析的基本方法。

用统计方法解决实际问题的过程主要包含以下步骤：

(1) 建立数学模型。分析实际问题，由实际问题抽象出数学模型。

(2) 收集数据。根据实际问题设计调查表，或选择其他适当的方法收集数据。在收集数据的过程中，可以全面观测所有总体并得到数据，这一过程称为普查；选取适当抽样方法从总体数据中抽取部分样本进行观测并得到数据的过程叫作抽样调查。

(3) 整理数据。对收集到的数据进行审核、校正、整理，从而使之系统化、条理化，并用文字、图画、表格等方式表示数据。其中，可运用条形统计图、扇形统计图、折线统计图等直观地表示数据。

(4) 分析数据。运用平均数、中位数、众数等数字特征，对样本数据进行分析，并进一步估计出总体的数字特征。

(5) 解释数据。结合总体数字特征，对数据进行解读。

(6) 得出实际问题的相关结论。

13. 【参考答案】《义务教育数学课程标准》（2011年版）在评价建议中指出，评价方式多样化体现在多种评价方法的运用，包括书面测验、口头测验、开放式问题、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、成长记录，等等。在条件允许的地方，也可以采用网上交流的方式进行评价。每种评价方式都具有各自的特点，教师应结合学习内容及学生学习的特点，选择适当的评价方式。下面列举几种不同的评价方式。

①口头测验，是指在教学过程中教师通过与学生之间的言语互动，及时地了解学生的数学学习情况，找出问题并及时纠正。

②书面测验，是指教师对学生的作业或者其他测验报告所做的书面性的评价。这种评价方式可以帮助教师了解学生的数学学习状态以及其知识掌握水平。

③课后访谈，是指教师通过课后与学生的沟通交流，了解学生数学学习情况的一种评价方式。这种评价方式可以帮助教师更直接地了解学生的数学学习情况。

④建立成长记录袋，是指将学生数学学习过程进行有效记录而形成的书面存档。这种评价方式既可以帮助师生随时了解学生数学学习的成长经历，也可以有效地帮助学生确立今后的学习目标与方向。

三、解答题

14. 【解析】（1）证明：设 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 是 R^2 上任意两点，则

$$T(P) = T((x_1, y_1)) = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}y_1\right), T(Q) = T((x_2, y_2)) = \left(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}y_2\right).$$

$$d(T(P), T(Q)) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{9}(y_1 - y_2)^2} \leq \sqrt{\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{1}{2}d(P, Q),$$

即存在满足题意的 $\rho = \frac{1}{2}$, 所以映射 T 是压缩映射。

(2) 设 $O(0, 0)$ 为欧式平面的原点。当点 P_0 是原点时, 显然 $P_n(0, 0)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O.$$

当点 P_0 不是原点时, 因为 $T(O)=O$, 依据 (1) 有 $d(P_n, O) \leq \frac{1}{2}d(P_{n-1}, O)$, 记

$d(P_n, O) = r (r > 0)$, 则 $d(P_n, O) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n r$ 。对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = \log_2 \frac{r}{\varepsilon}$, 当

$n > N$ 时, 有 $d(P_n, O) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n r < \varepsilon$, 所以由柯西收敛准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O$ 。

综上得 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = O$ 。

四、论述题

15. 【参考答案】函数是中学数学课程的主线, 它贯穿整个中学数学课程中, 方程、不等式、数列等内容均与函数有非常密切的联系。

①函数与方程。中学数学课程中方程的求解问题, 可以转化成求对应函数的零点问题。例如, 求一元一次方程 $ax+b=0(a \neq 0)$ 的根, 可以转化为求一次函数 $y=ax+b(a \neq 0)$ 与 x 轴交点的横坐标, 即求函数的零点问题。由此可以看出, 方程可看作函数的局部性质, 求方程的根就变成了求函数图象与 x 轴的交点问题。利用函数的整体性质可以研究方程根的性质, 判断根的个数, 并估计根所在的区间。

②函数与不等式。用函数的观点看, 不等式的解集就是使函数图象 $y=f(x)$ 在 x 轴上方或下方的 x 的取值。中学数学课程中的不等式的求解问题, 可以借助函数的图象进行解决。例如, 求一元二次不等式的解集, 可以借助二次函数的图象, 如求不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集, 可以通过画出函数 $f(x)=x^2-5x+6$ 的图象, 找到使函数值大于 0 的所有 x 的取值集合, 这个集合就是不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集。

③函数与数列。数列是一种特殊的函数，是一列有序的数，它的定义域是正整数集或其子集，而数列的通项公式就是相应的函数解析式。数列是离散的函数，表现在坐标系中是一些离散的点的集合。中学数学课程主要涉及等差数列与等比数列，等差数列的通项公式可以看作关于 n 的一次函数的离散化，等差数列的前 n 项和是二次函数的离散化；等比数列的通项公式及前 n 项和公式是指数函数的离散化，因此可以借助函数的性质来研究数列。例如，求等差数列的前 n 项和 $S_n=n^2-4n$ 在第几项取得最小值，可以转化为求函数 $f(x)=x^2-4x$ 的顶点横坐标。

五、案例分析题

16.【参考答案】（1）甲老师的教学，在落实课标这一理念的过程中缺乏对实际情况的应急应变，且其设置的为引导学生思考的问题的目的性不强。具体如下：甲老师在教学过程中，组织学生进行小组讨论，这体现了教师的组织者角色，但是讨论的例题，对于学生而言有一定难度，需要教师设置一定的铺垫问题，并给与指导，而该教师没有做相应措施，这表现为该教师作为组织者和引导者角色的不足与缺失。另外，当学生讨论的结论与教师预设的不同时，该教师也意识到学生进入了思维误区，终止了学生的思考，但是其终止之后并没有设计教学问题引导学生走出思维误区只是一味的批评学生的错误思路，导致出现第二次的终止讨论。这是该教师身为合作者和引导者做的不足之处。

乙老师的教学，在落实课标这一理念的过程中其引导者的作用得到了充分的体现，但是学生主体地位的体现有些缺失，教师的合作者以及组织者的角色落实不到位。具体如下：在教学过程中，乙老师能够引导学生对问题进行分析，引领学生突破知识的难点，这体现了教师的引导者角色的发挥。但是讲解的过于详细，没有体现以学生为主体，限制了学生的思维。同时，在学生讨论的过程中，没有做好明确分组，也没有进行巡视指导参与到学生的讨论当中去，缺少教师的组织与合作。

（2）甲教师存在的问题：①讨论的问题即为例题，该题目对于学生学习有一定的困难，需要教师有一定的引导，并给出铺垫问题，如对最短路线的探讨、何为最短路线、蚂蚁爬过的路径如何进行计算等。

②在学生探究之初仅仅只是因为与教学预设不符就开始质疑学生，中止讨论，并且当发现学生错误太多时终止思考，这些行为都反映出老师对于课堂的一些突发情况缺乏应急应变能力。

③没有让学生在讨论探索中去发现问题，也没有做到充分的引导，没有真正落实课标提出的课堂要交给学生，以学生为探究的主体。

④措辞不当。当看到学生把台阶画出来时，该教师直接终止讨论，指着题目说“画图有什么用”，显得不够尊重学生，没有平等的对待学生，在探究式学习中，老师需要降低自己的“姿态”，将自己定位为一名学习者，与学生一起体会曲折的学习过程，感受学习中遇到的失败和成功的喜悦。

乙教师存在的问题：①引导太多，从而让学生失去主体性，台阶模样的纸片，纸片的拉直都是由老师完成，学生完全在被动的接受，是一个没有学生参与、学生思维没有得到碰撞和启发的一个探究活动。

两位老师的活动设计虽然设置的都是探究活动，但忽略了探索活动是为了发展学生综合应用的能力，都只注重基本知识，而不关注数学的方法的呈现及学生在活动中的体验，同时也忽略了对学生学情的思考。对探究活动是发展学生的语言表达能力、自主探究能力、反思能力和自身的学习能力目的没有深入了解。

(3) 组织数学探究活动，需要注意以下事项：

①探究活动内容的选择要合适。要使探究活动更有效，探究内容的选择是否得当是很重要的。同时，探究内容要有激发性，也就是说，问题能激发学生的探究欲望，问题的设置要在学生的“最近发展区”。

②探究活动的指导要合理。探究活动中，教师所扮演的应该是一个组织者、引导者和合作者的角色，要扮演好这个角色，首先，要给学生创设探究的情境，其次，要保证学生有探究的时间，再次，探究活动并不是让学生毫无节制的大讨论，而是精心编制的教学活动，教师不能孤立于学生之外，要及时进行指导。之后要对学生的探究做出合理的评价。

③探究的过程中，正确处理教师的“引”和学生的“探”的关系。在探究式学习过程中，学生作为探究的主体，需要通过自己的探究去发现新事物。而为了顺利地完成任务，作为引导者的老师，要发挥指向灯的作用，既要在学生脱离主题的时候，适时地引导方向，不放任学生不着边际地乱探究，同时又不

能过分地牵制学生的思想，造成“伪探究”的现象。成功的探究式教学离不开学生的主动参与，要注重全体参与，让每个学生体验成功的乐趣。

六、教学设计题

17.【参考答案】(1)例1的教学目标：①通过计算并观察结果与乘数的关系，发现规律。②通过观察计算，掌握必需的独立探究、发现问题与分析问题的能力。③在探索学习的过程中，感受此乘法运算中的有趣规律，发展学习数学的兴趣，树立学习数学的信心。

例2的教学目标：①初步了解证明的方法，掌握规律证明的思维过程，会通过一般性的证明来验证自己发现的规律。②经历由具体数值计算到符号公式表达的过程，感受数学证明由特殊到一般的过程，形成数学思维，并培养提出问题、分析问题、解决问题的能力。③在证明规律的过程中感悟数学的严谨性，增加学习数学的兴趣。

(2)“提出问题”的主要教学过程：

①发现规律

师：观察这些式子中的数字，想想15，25，…，95可以拆分成什么？

生： $15=1\times 10+5$ ， $25=2\times 20+5$ ，…， $95=9\times 10+5$ 。

师：由此我们可以发现什么规律？

生：这些式子中的因数都等于该因数十位上的数字乘以10再加上5。

师：在拆分后的式子里，我们能发现哪些是变化的？哪些是不变的？

生：变的是与10相乘的数，不变的是再加上的数。

师：我们已经学过了用字母表示数，你能用字母来表示吗？

生：可以用a表示变化的数，即1,2,9，这些因数可以表示成 $a\times 10+5$

($a=1,2,9$)。

②提出猜想

师：因数我们用字母表示出来了，那么大家能用完整的式子表示出例1的算式及其计算结果吗？

生： $(a\times 10+5)\times (a\times 10+5)=a(a+1)\times 100+25$ ($a=1,2,9$)。

师：假设a代表所有小于10的任意正整数，那么例1中的乘法运算就可以一般化为一个公式，即 $(a\times 10+5)\times (a\times 10+5)=a(a+1)\times 100+25$ ($a=1,2,\dots,9$)。这个公式就是我们通过分析例1的运算规律得出的猜想。

(3) “分析问题”和“解决问题”的主要教学过程:

①分析问题

师: 观察等号左边的式子, 能发现什么?

生: 等号左边实际是一个完全平方。

②解决问题

师: 大家回忆一下完全平方公式。

生: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 。

师: 运用完全平方公式, 能知道 $(a \times 10+5)^2$ 等于什么吗?

生: $(a \times 10+5)^2=a^2 \times 100+2a \times 10 \times 5+25$ 。

师: 进一步运算可以得到什么?

生: 最终结果等于 $a(a+1) \times 100+25$ ($a=1,2,\dots,9$)。

师: 我们可以看到, 运算的最终结果是等号两边的式子相等, 即公式得证。

(4) 推广例 1 所探究的规律的的主要教学过程:

【发现一般规律】师: 继续观察例 1 中的算式, 还能有什么发现呢? 请大家观察每个式子中的两个因数。

预设: 学生发现每个式子中的两个因数都是一样的, 而且个位上的数字之和为 10。

师: 大家计算下面几个式子, 看看能发现什么规律。

38×32 , 43×47 , 81×89

师: 这些式子中的因数有什么特点吗?

引导学生思考直到学生能够答出: 这些式子中的两个因数十位上的数相同, 个位上的数相加。

师: 这三个式子的计算结果分别是 $38 \times 32=1216$, $43 \times 47=2021$, $81 \times 89=7209$, 结合我们刚才得到的结论, 能发现什么规律呢?

引导学生思考直到学生能够答出: 计算结果中的后两位数是两个因数的个位上的数的乘积, 前两位数是因数的十位上的数加一乘以十位上的数本身。

师: 结合例 1 中的计算过程, 请大家补全下列算式。(板书展示)

$38 \times 32=SSS=1216$, $43 \times 47=SSS=2021$, $81 \times 89=SSS=7209$

师: 我们用代数式怎么表示这个算式呢?

引导学生思考直到学生能够答出：可以用 $10+b$ 表示其中一个因数，用 $10a+(10-b)$ 表示另一个因数，并通过观察得出猜想： $(10a+b)[10a+(10-b)]=a(a+1)\times 100+b(10-b)$ 。

【验证规律】师：这里的 a 是正整数，大家知道 b 要取什么数吗？

引导学生思考直到学生能够答出：小于 10 的正整数。

师：下面请大家用我们刚才学过的知识证明一下这个算式。

预设：教师观察学生的计算过程，并找两位学生在黑板上板演，结合学生的板演进行讲解，以深化大家的理解。

板演过程： $(10a+b)[10a+(10-b)]=100a^2+10a(10-b)+10ab+b(10-b)$
 $=100a^2+100a-10ab+10ab+b(10-b)=a(a+1)\times 100+b(10-b)$

【练习】口算下列算式：

① 17×13 ；② 24×26 ；③ 3×37 ④ 45×45 ；⑤ 51×59 。

师（小结）：通过这节课的学习，我们可以快速口算出两个数相乘，其中两个因数十位上的数相同，个位上的数相加等于 10 的算式。在学习的过程中，我们先通过一些算式找出规律，并根据这些规律归纳猜想出对应的公式，最后经过严格的证明验证我们的猜想，我们称这一过程所贯穿的思维方法为归纳推理。